

文章编号:1005-3085(2010)06-1075-11

\mathcal{L} 集合范畴中的 \mathcal{L} 幺半群模*

张 红, 汤建钢, 李国华

(伊犁师范学院数学系, 伊宁 835000)

摘 要: 本文引入以完备的 Heyting 代数成真值集 \mathcal{L} 集合范畴及 \mathcal{L} 幺半群范畴概念, 构造了 \mathcal{L} 幺半群模结构与 \mathcal{L} 幺半群 T 代数结构; 讨论了 \mathcal{L} 积函子 F 与 \mathcal{L} 幺半群单位函子 G 的伴随性, 并证明了与该伴随对应的 \mathcal{L} 比较函子 K 是一个同构, 从而得出 \mathcal{L} 幺半群单位函子 G 是 \mathcal{L} 可模的。

关键词: \mathcal{L} 集合范畴; \mathcal{L} 幺半群模; \mathcal{L} 幺半群 T 代数; \mathcal{L} 可模

分类号: AMS(2000) 03E72; 16D80; 18B99; 20N25 **中图分类号:** O154.1; O159 **文献标识码:** A

1 引言

1965年, 美国控制论专家 Zadeh 提出模糊集概念, 受到广泛的重视, 迄今模糊集理论已较为完善。1980年, 王世强^[1]从模型论的角度, 提出格值模型概念, 该格值逻辑能用于解决命题演算及谓词演算中的独立性证明问题。文献[2-5]以格值模型理论为基础, 给出以完全分配格成真值集的模糊集概念, 并研究了各种模糊代数系统的数理逻辑基础, 该工作使模糊集理论与格值逻辑建立起联系。

1969年, Lawvere 和 Tierney 提出公理化连续变化集合范畴 Topos 概念。人们发现在一般 Topos 中存在子对象分类子(也称真值集), 该子对象分类子是一个完备的 Heyting 代数, 它与以 Brouwer 为代表的唯心主义直觉逻辑代数结构具有一致性。由于模糊集的真值集 $[0, 1]$ 闭区间是一个完备的 Heyting 代数, 从而引导我们从 Topos 的逻辑和直觉逻辑角度出发, 提出新的集合模型, 即将基于经典逻辑的布尔值模型提升到基于 Topos 的逻辑和直觉逻辑的 \mathcal{L} 集合模型, 并研究其各种重要性质。

范畴论是 Topos 理论的基础, 也是一种统一简洁的“符号语言”, 因此我们在本文中将使用范畴论的语言研究 \mathcal{L} 集合理论。

本文首先给出 \mathcal{L} 集合范畴和 \mathcal{L} 幺半群范畴概念, 并以此构造了 \mathcal{L} 幺半群模结构及 \mathcal{L} 幺半群 T 代数结构; 最后证明 \mathcal{L} 比较函子 K 是一个同构, 由此同构得出 \mathcal{L} 幺半群单位函子是 \mathcal{L} 可模的。

本文中 Set 表示集合范畴, \mathcal{L} 表示完备的 Heyting 代数, 即 Locale^[6]。

2 \mathcal{L} 集合范畴、 \mathcal{L} 幺半群范畴

定义 1 设 $X \in \text{ob}(\text{Set})$, 则映射 $A: X \rightarrow \mathcal{L}$ 称为 X 的 \mathcal{L} 子集, 偶序 (X, A) 称为 \mathcal{L} 集合。

定义 2 设 $(X, A), (Y, B)$ 为两个 \mathcal{L} 集合, $f: X \rightarrow Y$ 是映射, 如果 $A \leq B \circ f$, 则称 f 是 (X, A) 到 (Y, B) 的 \mathcal{L} 映射。记作 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 或 $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B)$ 。

收稿日期: 2009-05-13. 作者简介: 张红(1981年4月生), 女, 硕士. 研究方向: 代数与序结构.

*基金项目: 国家自然科学基金(10871137); 伊犁师范学院 2008 年度大学生科研计划课题(2008XS06).

根据范畴的定义^[7]可知, 以全体 \mathcal{L} 集合为对象, \mathcal{L} 映射为态射可构成一个范畴, 称之为 \mathcal{L} 集合范畴, 记作 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 。

注1 1) 两个 \mathcal{L} 映射 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, $g: (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ 的复合为映射的复合 $g \circ f: (X, A) \rightarrow (Z, C)$ 。因为 $A \leq B \circ f$, $B \leq C \circ g$, 故

$$A \leq B \circ f \leq (C \circ g) \circ f = C \circ (g \circ f),$$

复合的定义是合理的。

2) \mathcal{L} 集合范畴 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 的单位态射是单位映射 $I_{(X, A)} = 1_X: (X, A) \rightarrow (X, A)$ 。

定理1 设 $(X, A), (Y, B) \in \text{ob Set}(\mathcal{L})$, 则态射 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是 \mathcal{L} 集合范畴 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 中的同构态射当且仅当 $f: X \rightarrow Y$ 是一一映射, 且 $A = B \circ f$ 。

证明 充分性: 若 $f: X \rightarrow Y$ 是一一映射, 则存在 $g: Y \rightarrow X$, 使得 $g \circ f = 1_X$, $f \circ g = 1_Y$, 由 $A = B \circ f$, 可知 $f \in \text{hom}_{\text{Set}(\mathcal{L})}((X, A), (Y, B))$ 。再由 $A = B \circ f$, 可知

$$A \circ g = (B \circ f) \circ g = B \circ (f \circ g) = B \circ 1_Y = B,$$

故

$$B = A \circ g, \quad g \in \text{hom}_{\text{Set}(\mathcal{L})}((Y, B), (X, A)).$$

再由 $g \circ f = 1_X = 1_{(X, A)}$, $f \circ g = 1_Y = I_{(Y, B)}$ 可以知道, \mathcal{L} 映射 f 是 \mathcal{L} 集合范畴 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 中的同构态射。

必要性: 由于 \mathcal{L} 映射 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是一个同构, 故存在 \mathcal{L} 映射 $g: (Y, B) \rightarrow (X, A)$, 使得

$$g \circ f = 1_{(X, A)} = 1_X, \quad f \circ g = 1_{(Y, B)} = 1_Y,$$

故 $f: X \rightarrow Y$ 可逆, 即 f 为一一映射。又由于

$$A \leq B \circ f \leq (A \circ g) \circ f = A \circ (g \circ f) = A \circ 1_X = A,$$

从而 $A = B \circ f$ 。

证毕

下文用 Sg 表示含幺元的半群范畴。

定义3 设 $M \in \text{ob}(Sg)$, $\alpha: M \rightarrow \mathcal{L}$ 是映射, 如果:

- 1) 对任意 $x, y \in M$ 有 $\alpha(xy) \geq \alpha(x) \wedge \alpha(y)$;
- 2) $\alpha(e) = 1$, 其中 e 是 M 的幺元, 则称 α 是 M 的一个 \mathcal{L} 幺子半群, 偶序 (M, α) 称为一个 \mathcal{L} 幺半群。

定义4 设 $(M, \alpha), (N, \beta)$ 是 \mathcal{L} 幺半群, $f: M \rightarrow N$ 是半群同态且满足 $A \leq B \circ f$, 则称 f 是 (M, α) 到 (N, β) 的 \mathcal{L} 幺半群同态。记作 $f: (M, \alpha) \rightarrow (N, \beta)$, 或 $(M, \alpha) \xrightarrow{f} (N, \beta)$ 。

易知, 以全体 \mathcal{L} 幺半群为对象, \mathcal{L} 幺半群同态为态射可以构成一个范畴, 我们称之为 \mathcal{L} 幺半群范畴。记作 $Sg(\mathcal{L})$ 。

3 \mathcal{L} 幺半群模

定义5 设 $T = (M, \alpha) \times () : \text{Set}(\mathcal{L}) \rightarrow \text{Set}(\mathcal{L})$, 其中 (M, α) 为 \mathcal{L} 幺半群。如果 T 满足下面两个条件:

(A₁) 对任意

$$(X, A) \in \text{ob}(\text{Set}(\mathcal{L})), \quad T(X, A) = (M, \alpha) \times (X, A) = (M \times X, \alpha p_1 \wedge A p_2);$$

(A₂) 对任意 \mathcal{L} 映射

$$f: (X, A) \rightarrow (Y, B), \quad T(f) = 1_M \times f: (M, \alpha) \times (X, A) \rightarrow (M, \alpha) \times (Y, B),$$

其中 $p_1: M \times X \rightarrow M$, $p_2: M \times X \rightarrow X$ 分别为投影映射, $(1_M \times f)(m, x) = (m, f(x))$ 。这里 $m \in M$, $x \in X$, 则 T 是一个从范畴 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 到范畴 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 的函子, 我们称之为 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上关于 (M, α) 的 \mathcal{L} 幺半群积函子, 简称 \mathcal{L} 积函子, 又称为 \mathcal{L} 幺半群在 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上的积作用。易验证 $T(f)$, 即 $1_M \times f$ 为一个 \mathcal{L} 映射, 称为 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上关于 (M, α) 的 \mathcal{L} 积映射, 简称为 \mathcal{L} 积映射。

注 2 1) \mathcal{L} 积映射可以进行复合。即若

$$(M, \alpha) \times (X, A) \xrightarrow{1_M \times f} (M, \alpha) \times (Y, B) \xrightarrow{1_M \times f'} (M, \alpha) \times (Z, C),$$

则 $(1_M \times f') \circ (1_M \times f) = 1_M \times (f' \circ f)$ 。

2) \mathcal{L} 积映射满足结合律。即若

$$(M, \alpha) \times (X, A) \xrightarrow{1_M \times f} (M, \alpha) \times (Y, B) \xrightarrow{1_M \times f'} (M, \alpha) \times (Z, C) \xrightarrow{1_M \times f''} (M, \alpha) \times (U, D),$$

则根据 \mathcal{L} 映射的结合律得 $(f'' \circ f') \circ f = f'' \circ (f' \circ f)$, 从而

$$1_M \times ((f'' \circ f') \circ f) = 1_M \times (f'' \circ (f' \circ f)).$$

再由注 1 可知

$$1_M \times ((f'' \circ f') \circ f) = (1_M \times (f'' \circ f')) \circ (1_M \times f) = ((1_M \times f'') \circ (1_M \times f')) \circ (1_M \times f).$$

类似可知

$$1_M \times (f'' \circ (f' \circ f)) = (1_M \times f'') \circ ((1_M \times f') \circ (1_M \times f)),$$

所以

$$((1_M \times f'') \circ (1_M \times f')) \circ (1_M \times f) = (1_M \times f'') \circ ((1_M \times f') \circ (1_M \times f)).$$

3) \mathcal{L} 积映射

$$I_{(M, \alpha)} \times I_{(Y, B)} = 1_M \times 1_Y: (M, \alpha) \times (Y, B) \rightarrow (M, \alpha) \times (Y, B),$$

满足对任意的

$$1_M \times f: (M, \alpha) \times (Y, B) \rightarrow (M, \alpha) \times (Y', B'),$$

$$1_M \times g: (M, \alpha) \times (Z, C) \rightarrow (M, \alpha) \times (Y, B),$$

下列等式成立

$$(1_M \times f) \circ (1_M \times 1_Y) = 1_M \times f, \quad (1_M \times 1_Y) \circ (1_M \times g) = 1_M \times g,$$

其中 $(Y, B) \in \text{Set}(\mathcal{L})$ 。

由上述分析可知以形如 $(M, \alpha) \times (X, A)$ 的乘积族为对象, \mathcal{L} 积映射为态射可构成一个范畴, 称为 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上关于 (M, α) 的 \mathcal{L} 积幺半群范畴, 在不引起混淆的情况, 简称为 \mathcal{L} 积幺半群范畴。将其记作 $(M, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L})$, 其中 (M, α) 为 \mathcal{L} 幺半群。

引理 1 设 (M, α) 为 \mathcal{L} 幺半群, 定义 $\eta : I_{\text{Set}(\mathcal{L})} \rightarrow T$, 满足对任意 $(X, A) \in \text{ob}(\text{Set}(\mathcal{L}))$, 有 $\eta_{(X, A)} : I_{\text{Set}(\mathcal{L})}(X, A) \rightarrow T(X, A)$, 即

$$(X, A) \xrightarrow{\eta_{(X, A)}} (M, \alpha) \times (X, A),$$

其中 $\eta_{(X, A)}(x) = (e, x)$, 则 η 为一个自然变换。

证明 根据范畴中自然变换的定义^[7], 首先证明 η 定义的合理性, 即证明对任意 $(X, A) \in \text{ob}(\text{Set}(\mathcal{L}))$, $\eta_{(X, A)}$ 是 \mathcal{L} 映射。由于

$$(\alpha p_1 \wedge A p_2) \eta_{(X, A)}(x) = (\alpha p_1 \wedge A p_2)(e, x) = \alpha(e) \wedge A(x) = 1 \wedge A(x) = A(x),$$

所以 $A \leq (\alpha p_1 \wedge A p_2) \eta_{(X, A)}$ 。这说明 $\eta_{(X, A)}$ 是一个 \mathcal{L} 映射, 所以 η 定义是合理的。

再证对任意 \mathcal{L} 映射 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, 下面的图表可交换

$$\begin{array}{ccc} I(X, A) & \xrightarrow{\eta_{(X, A)}} & (M, \alpha) \times (X, A) \\ f \downarrow & & \downarrow 1_M \times f \\ I(Y, B) & \xrightarrow{\eta_{(Y, B)}} & (M, \alpha) \times (Y, B) \end{array}$$

由于

$$(1_M \times f) \circ \eta_{(X, A)}(x) = (1_M \times f)(e, x) = (e, f(x)),$$

$$\eta_{(Y, B)} \circ f(x) = \eta_{(Y, B)}(f(x)) = (e, f(x)),$$

故 $(1_M \times f) \circ \eta_{(X, A)}(x) = \eta_{(Y, B)} \circ f(x)$ 。又有

$$(\alpha p_1 \wedge A p_2)(e, f(x)) = \alpha(e) \wedge B(f(x)) = 1 \wedge B(f(x)) = B(f(x)),$$

$$(\alpha p_1 \wedge A p_2) \eta_{(X, A)}(x) = A(x),$$

由于 $A(x) \leq B(f(x))$, 可知 $(1_M \times f) \circ \eta_{(X, A)}$, $\eta_{(Y, B)} \circ f$ 在 (X, A) 上的作用是合理的, 故上面图表可交换。根据范畴上自然变换的定义, 这就证明了 η 是一个自然变换。

我们称上述自然变换为 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上关于 (M, α) 的 \mathcal{L} 幺半群单位自然变换, 简称为 \mathcal{L} 单位自然变换。

引理 2 设 (M, α) 为 \mathcal{L} 幺半群, 定义 $\mu : TT \rightarrow T$, 满足: 对任意 $(X, A) \in \text{ob}(\text{Set}(\mathcal{L}))$, 有 $\mu_{(X, A)} : TT(X, A) \rightarrow T(X, A)$, 即

$$(M, \alpha) \times ((M, \alpha) \times (X, A)) \xrightarrow{\mu_{(X, A)}} (M, \alpha) \times (X, A),$$

其中 $\mu_{(X, A)}(m, (n, x)) = (mn, x)$ 。这里 $m, n \in M$, $x \in X$, mn 为幺半群 M 上 m 与 n 的乘法运算, 则 μ 为一个自然变换。

证明 首先证明 μ 定义的合理性, 即证明对任意 $(X, A) \in \text{ob}(\text{Set}(\mathcal{L}))$, $\mu_{(X, A)}$ 是一个 \mathcal{L} 映射。由于

$$(M, \alpha) \times ((M, \alpha) \times (X, A)) = (M \times (M \times X), \alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge A p_3)),$$

$$(M, \alpha) \times (X, A) = (M \times X, \alpha p_1 \wedge A p_2),$$

又知

$$\begin{aligned} & (\alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge A p_3))(m, (n, x)) \\ &= \alpha(m) \wedge (\alpha(n) \wedge A(x)) \\ &= \alpha(m) \wedge \alpha(n) \wedge A(x)(\alpha p_1 \wedge A p_2)(mn, x) = \alpha(mn) \wedge A(x), \end{aligned}$$

显然知 $\alpha(mn) \wedge A(x) \geq \alpha(m) \wedge \alpha(n) \wedge A(x)$, 故 $(\alpha p_1 \wedge A p_2)\mu_{(X,A)} \geq \alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge A p_3)$ 。说明 $\mu_{(X,A)}$ 是 \mathcal{L} 映射, 所以 μ 的定义是合理的。

再证对任意 \mathcal{L} 映射 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, 下面的图表可交换

$$\begin{array}{ccc} (M, \alpha) \times ((M, \alpha) \times (X, A)) & \xrightarrow{\mu_{(X,A)}} & (M, \alpha) \times (X, A) \\ \downarrow 1_M \times (1_M \times f) & & \downarrow 1_M \times f \\ (M, \alpha) \times ((M, \alpha) \times (Y, B)) & \xrightarrow{\mu_{(Y,B)}} & (M, \alpha) \times (Y, B) \end{array}$$

由于

$$\begin{aligned} (1_M \times f) \circ \mu_{(X,A)}(m, (n, x)) &= (1_M \times f)(mn, x) = (mn, f(x)), \\ \mu_{(Y,B)} \circ (1_M \times (1_M \times f))(m, (n, x)) &= \mu_{(Y,B)}(m, (n, f(x))) = (mn, f(x)), \end{aligned}$$

易见 $(1_M \times f) \circ \mu_{(X,A)}$ 和 $\mu_{(Y,B)} \circ (1_M \times (1_M \times f))$ 在 $(M, \alpha) \times ((M, \alpha) \times (X, A))$ 上的作用也是合理的。故 $(1_M \times f) \circ \mu_{(X,A)} = \mu_{(Y,B)} \circ (1_M \times (1_M \times f))$ 。

从而上面图表可交换, 根据范畴上自然变换的定义, 这就证明了 μ 是一个自然变换。

我们称 $\mu: TT \rightarrow T$ 为 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上关于 (M, α) 的 \mathcal{L} 幺半群 μ 自然变换, 简称 $\mathcal{L}-\mu$ 自然变换。

定理 2 如上定义的 T, μ, η 构成 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上的一个模 (T, μ, η) 。

证明 根据范畴上模的定义^[6], 只需证明, 对任意 $(X, A) \in \text{ob}(\text{Set}(\mathcal{L}))$, 上文定义的 \mathcal{L} 积函子 T , \mathcal{L} 单位自然变换 μ , $\mathcal{L}-\mu$ 自然变换 η 满足下面两个图表可交换

$$\begin{array}{ccc} (M, \alpha) \times ((M, \alpha) \times (X, A)) & \xleftarrow{\eta_{(M,\alpha) \times (X,A)}} & (M, \alpha) \times (X, A) \\ \uparrow 1_M \times \eta_{(X,A)} & \searrow \mu_{(X,A)} & \downarrow 1_M \times 1_X \\ (M, \alpha) \times (X, A) & \xrightarrow{1_M \times 1_X} & (M, \alpha) \times (X, A) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (M, \alpha) \times \{(M, \alpha) \times [(M, \alpha) \times (X, A)]\} & \xrightarrow{1_M \times \mu_{(X,A)}} & (M, \alpha) \times [(M, \alpha) \times (X, A)] \\ \downarrow \mu_{(M,\alpha) \times (X,A)} & & \downarrow \mu_{(X,A)} \\ (M, \alpha) \times ((M, \alpha) \times (X, A)) & \xrightarrow{\mu_{(X,A)}} & (M, \alpha) \times (X, A) \end{array}$$

在第一个图表中, 对任意 $(m, x) \in M \times X$, 由于

$$\begin{aligned} (\mu_{(X,A)} \circ \eta_{(M,\alpha) \times (X,A)})(m, x) &= \mu_{(X,A)}(e, (m, x)) = (em, x) = (m, x), \\ (\mu_{(X,A)} \circ (1_M \times \eta_{(X,A)}))(m, x) &= \mu_{(X,A)}(m, (e, x)) = (me, x) \\ &= (m, x)(1_M \times 1_X)(m, x) = (m, x), \end{aligned}$$

可知

$$\mu_{(X,A)} \circ \eta_{(M,\alpha) \times (X,A)}(m, x) = \mu_{(X,A)} \circ (1_M \times \eta_{(X,A)})(m, x) = (1_M \times 1_X)(m, x).$$

再由

$$\begin{aligned} (\alpha p_1 \wedge A p_2)(m, x) &= \alpha(m) \wedge A(x), \\ (\alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge A p_3))(\eta_{(M,\alpha) \times (X,A)}(m, x)) \\ &= (\alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge A p_3))(e, (m, x)) = \alpha(e) \wedge (\alpha(m) \wedge A(x)) = \alpha(m) \wedge A(x), \\ (\alpha p_1 \wedge A p_2)(\mu_{(X,A)} \circ \eta_{(M,\alpha) \times (X,A)}(m, x)) &= (\alpha p_1 \wedge A p_2)(m, x) = \alpha(m) \wedge A(x), \end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned} (\alpha p_1 \wedge A p_2)(m, x) &= (\alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge A p_3))(\eta_{(M,\alpha) \times (X,A)}(m, x)) \\ &= (\alpha p_1 \wedge A p_2)(\mu_{(X,A)} \circ \eta_{(M,\alpha) \times (X,A)}(m, x)), \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} (\alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge A p_3))(1_M \times \eta_{(X,A)}(m, x)) \\ &= (\alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge A p_3))(m, (e, x)) = \alpha(m) \wedge (\alpha(e) \wedge A(x)) = \alpha(m) \wedge A(x), \\ (\alpha p_1 \wedge A p_2)(\mu_{(X,A)} \circ (1_M \times \eta_{(X,A)})(m, x)) &= (\alpha p_1 \wedge A p_2)(m, x) = \alpha(m) \wedge A(x), \end{aligned}$$

可知

$$\alpha p_1 \wedge A p_2 = (\alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge A p_3))(1_M \times \eta_{(X,A)}) = (\alpha p_1 \wedge A p_2)(\mu_{(X,A)} \circ (1_M \times \eta_{(X,A)})).$$

这说明, $\mu_{(X,A)} \circ \eta_{(M,\alpha) \times (X,A)}$ 和 $\mu_{(X,A)} \circ (1_M \times \eta_{(X,A)})$ 在 $(M, \alpha) \times (X, A)$ 上的作用是合理的。

由此可得

$$\mu_{(X,A)} \circ \eta_{(M,\alpha) \times (X,A)} = \mu_{(X,A)} \circ (1_M \times \eta_{(X,A)}) = 1_M \times 1_X.$$

故第一个图表可交换。类似可得, 第二个图表可交换。

所以 \mathcal{L} 积函子 T , $\mathcal{L} - \mu$ 自然变换 μ , \mathcal{L} 单位自然变换 η 构成 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上的一个模 (T, μ, η) , 称为 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上关于 (M, α) 的 \mathcal{L} 幺半群模, 简称 \mathcal{L} 幺半群模。证毕

4 \mathcal{L} 幺半群 T 代数

定义 6 设 (T, μ, η) 是 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上关于 (M, α) 的 \mathcal{L} 幺半群模, 对某 $(X, A) \in \text{ob}(\text{Set}(\mathcal{L}))$, 令 $h: (M, \alpha) \times (X, A) \rightarrow (X, A)$, 其中对任意 $(m, x) \in M \times X$, $h(m, x) = mx$, 且 $A(mx) \geq \alpha(m) \wedge A(x)$ 。这里 $mx = m \cdot x$ 表示幺半群 M 在集合 X 上的作用; 当 $m = e$ 时, $ex = x$ 。则易知 h 是一个 \mathcal{L} 映射, 称为 \mathcal{L} 幺半群模关于 (X, A) 的 \mathcal{L} 映射, 简称 \mathcal{L} 幺半群模映射。

定理 3 如上定义的 $[(X, A), h]$ 是 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上的一个 T 代数。

证明 由 h 的定义已知 h 是一个 \mathcal{L} 映射, 根据范畴上 T 代数的定义^[7], 只需再证明下面两个图表可交换

$$\begin{array}{ccc} (X, A) & \xrightarrow{\eta_{(X,A)}} & (M, \alpha) \times (X, A) \\ & \searrow 1_X & \downarrow h \\ & & (X, A) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (M, \alpha) \times ((M, \alpha) \times (X, A)) & \xrightarrow{1_M \times h} & (M, \alpha) \times (X, A) \\
 \downarrow \mu_{(X, A)} & & \downarrow h \\
 (M, \alpha) \times (X, A) & \xrightarrow{h} & (X, A)
 \end{array}$$

易验证上面第1图表是交换的。只需考虑

$$h \circ \eta_{(X, A)}(x) = h(e, x) = ex = x, \quad A(h \circ \eta_{(X, A)}(x)) = A(x), \quad \forall x \in X.$$

在第2个图表中, 对任意 $(m, (n, x)) \in M \times (M \times X)$, 由于

$$h \circ (1_M \times h)(m, (n, x)) = h(m, nx) = m(nx) = (mn)x,$$

$$h \circ \mu_{(X, A)}(m, (n, x)) = h(mn, x) = (mn)x,$$

可知

$$h \circ (1_M \times h)(m, (n, x)) = h \circ \mu_{(X, A)}(m, (n, x)).$$

再由

$$(\alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge Ap_3))(m, (n, x)) = \alpha(m) \wedge \alpha(n) \wedge A(x),$$

$$(\alpha p_1 \wedge Ap_2)((1_M \times h)(m, (n, x))) = (\alpha p_1 \wedge Ap_2)(m, nx)$$

$$= \alpha(m) \wedge A(nx) \geq \alpha(m) \wedge (\alpha(n) \wedge A(x))$$

$$= \alpha(m) \wedge \alpha(n) \wedge A(x),$$

$$A((h \circ (1_M \times h))(m, (n, x))) = A(h(m, nx)) = A(m(nx)) \geq \alpha(m) \wedge A(nx),$$

可知

$$A(h \circ (1_M \times h)) \geq (\alpha p_1 \wedge Ap_2)(1_M \times h) \geq \alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge Ap_3).$$

又由

$$(\alpha p_1 \wedge Ap_2)(\mu_{(X, A)}(m, (n, x))) = (\alpha p_1 \wedge Ap_2)(mn, x)$$

$$= \alpha(mn) \wedge A(x) \geq \alpha(m) \wedge \alpha(n) \wedge A(x),$$

$$A[(h \circ \mu_{(X, A)})(m, (n, x))] = A(h(mn, x)) = A((mn)x) \geq \alpha(mn) \wedge A(x),$$

可知

$$A(h \circ \mu_{(X, A)}) \geq (\alpha p_1 \wedge Ap_2)\mu_{(X, A)} \geq \alpha p_1 \wedge (\alpha p_2 \wedge Ap_3).$$

这说明 $h \circ (1_M \times h)$ 和 $h \circ \mu_{(X, A)}$ 在 $M \times (M \times X)$ 上的作用是合理的。

由此可得 $h \circ (1_M \times h) = h \circ \mu_{(X, A)}$ 。故第2个图表也可交换。

所以 $[(X, A), h]$ 是 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上的一个 T 代数, 称为 $[(X, A), h]$ 为 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上 (X, A) 关于 (M, α) 的 \mathcal{L} 么半群 T 代数, 简称 \mathcal{L} 么半群 T 代数。

注3 对任意的 $(X, A) \in \text{ob}(\text{Set}(\mathcal{L}))$, $[T(X, A), \mu_{(X, A)}]$ 是一个 \mathcal{L} 么半群 T 代数。

定义7 设 $[(X, A), h]$, $[(Y, B), r]$ 是 \mathcal{L} 么半群 T 代数, 设 \mathcal{L} 映射 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 满足下面图表可交换, 即 $r \circ T(f) = f \circ h$ 。

$$\begin{array}{ccc}
 (M, \alpha) \times (X, A) & \xrightarrow{1_M \times f} & (M, \alpha) \times (Y, B) \\
 \downarrow h & & \downarrow r \\
 (X, A) & \xrightarrow{f} & (Y, B)
 \end{array}$$

则称 \mathcal{L} 映射 f 是 \mathcal{L} 幺半群 T 代数 $[(X, A), h]$ 到 $[(Y, B), r]$ 的 \mathcal{L} 幺半群 T 代数映射, 简称 \mathcal{L} 幺半群 T 代数映射。

以全体 \mathcal{L} 幺半群 T 代数为对象, \mathcal{L} 幺半群 T 代数映射为态射可构成一个范畴, 称为 \mathcal{L} 幺半群 T 代数范畴, 记作 $[\text{Set}(\mathcal{L})]^T$ 。

注 4 1) \mathcal{L} 幺半群 T 代数映射可以复合并满足结合律。

2) \mathcal{L} 幺半群 T 代数范畴中的单位态射是 $1_{(Y, B)} = 1_Y : [(Y, B), r] \rightarrow [(Y, B), r]$ 。

定义 8 设 $G^T : [\text{Set}(\mathcal{L})]^T \rightarrow \text{Set}(\mathcal{L})$ 。如果 G^T 满足条件:

(A₁) 对任意 $[(X, A), h] \in \text{ob}([\text{Set}(\mathcal{L})]^T)$, $G^T[(X, A), h] = (X, A)$ 。

(A₂) 对任意 \mathcal{L} 映射 $f : G^T(f) = f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, 则易验证 G^T 是一个函子, 称为范畴 $[\text{Set}(\mathcal{L})]^T$ 到 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 的 \mathcal{L} 幺半群遗忘函子, 简称为 \mathcal{L} 幺半群遗忘函子。

5 \mathcal{L} 幺半群单位函子是 \mathcal{L} 可模的

令 $(N, \alpha) \in \text{Sg}(\mathcal{L})$, $N \subset M$, $\alpha(n) = 1$, 其中 $n \in N$ 。即, (N, α) 是 (M, α) 的满足 $\alpha(n) = 1$ 的子幺半群。根据上文可对偶地给出范畴 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上关于子幺半群 (N, α) 的所有定义。在不引起混淆的情况下, 下文的简称将指代 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上关于 (N, α) 的相关概念, 如 \mathcal{L} 积函子是 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 上关于 (N, α) 的 \mathcal{L} 幺半群积函子的简称。

定义 9 对任意 $(X, A) \in \text{ob}(\text{Set}(\mathcal{L}))$, 令函子 $F^T : \text{Set}(\mathcal{L}) \rightarrow [\text{Set}(\mathcal{L})]^T$ 满足条件:

1) $F^T(X, A) = [T(X, A), \mu_{(X, A)}]$;

2) 对于任意 \mathcal{L} 映射

$$f : (X, A) \rightarrow (Y, B), \quad F^T(f) = T(f) = 1_N \times f : (N, \alpha) \times (X, A) \rightarrow (N, \alpha) \times (Y, B),$$

我们称函子 F^T 为从范畴 $\text{Set}(\mathcal{L})$ 到范畴 $[\text{Set}(\mathcal{L})]^T$ 的 \mathcal{L} 幺半群扩充函子, 简称为 \mathcal{L} 幺半群扩充函子。

事实上, 由引理 2 证明可知 $T(f) \circ \mu_{(X, A)} = \mu_{(Y, B)} \circ TT(f)$, 再由定义 7, 可知 $1_N \times f$ 是 \mathcal{L} 幺半群 T 代数 $[(N, \alpha) \times (X, A), \mu_{(X, A)}]$ 到 $[(N, \alpha) \times (Y, B), \mu_{(Y, B)}]$ 的 \mathcal{L} 幺半群 T 代数映射, 从而保证了上述定义中条件 2) 的合理性。

以形如 $[T(X, A), \mu_{(X, A)}]$ 的 \mathcal{L} 幺半群 T 代数全体为对象, 形如 $1_N \times f$ 的 \mathcal{L} 幺半群 T 代数映射为态射可构成一个范畴, 记作 \mathcal{D}^T 。

引理 3 \mathcal{L} 幺半群扩充函子 F^T 与 \mathcal{L} 幺半群遗忘函子 G^T 是一对伴随函子, F^T 为左伴随, G^T 为右伴随, 即 $F^T \dashv G^T$ 。

证明 对任意 $(X, A), (Y, B) \in \text{ob}(\text{Set}(\mathcal{L}))$, 下面考虑映射

$$\begin{aligned}
 \varphi_{(X, Y)} : \text{Hom}([[(N, \alpha) \times (X, A), \mu_{(X, A)}], [(N, \alpha) \times (Y, B), \mu_{(Y, B)}]) \\
 \rightarrow \text{Hom}((X, A), (N, \alpha) \times (Y, B)),
 \end{aligned}$$

若存在 \mathcal{L} 幺半群 T 代数映射

$$f : [[(N, \alpha) \times (X, A), \mu_{(X, A)}]] \rightarrow [(N, \alpha) \times (Y, B), \mu_{(Y, B)}],$$

则对任意 $(n, x) \in N \times X$, 有 $f(n, x) = (n, y)$ 且 $\alpha(n) \wedge A(x) \leq \alpha(n) \wedge B(y)$, 由 $f(n, x) = (n, y)$ 可知 $f(x) = y$, 则存在由 f 诱导的映射 $f_n : X \rightarrow N \times Y$, 使得 $f_n(x) = (n, y)$ 。由于 $\alpha(n) = 1$, 所以 $\alpha(n) \wedge A(x) \leq \alpha(n) \wedge B(y)$ 可转化为 $A(x) \leq \alpha(n) \wedge B(y)$ 。从而 f_n 为从 (X, A) 到 $(N, \alpha) \times (Y, B)$ 的 \mathcal{L} 映射。反之, 若存在 \mathcal{L} 映射 $f_n : (X, A) \rightarrow (N, \alpha) \times (Y, B)$, 使得 $f_n(x) = (n, y)$, 并且 $A(x) \leq \alpha(n) \wedge B(y)$, 则存在 f_n 诱导的映射 $f : X \rightarrow Y$ 使得 $f(x) = y$, 从而存在映射 $T(f) = 1_N \times f : N \times X \rightarrow N \times Y$, 使得 $(1_N \times f)(n, x) = (n, y)$ 。由于 $\alpha(n) = 1$, 所以 $A(x) \leq \alpha(n) \wedge B(y)$ 可转化为 $\alpha(n) \wedge A(x) \leq \alpha(n) \wedge B(y)$ 。从而 $1_N \times f$ 为从 $(N, \alpha) \times (X, A)$ 到 $(N, \alpha) \times (Y, B)$ 的 \mathcal{L} 映射。由注记3可知

$$[(N, \alpha) \times (X, A), \mu_{(X, A)}], [(N, \alpha) \times (Y, B), \mu_{(Y, B)}]$$

是 \mathcal{L} 幺半群 T 代数, 而根据定义9可知, $1_N \times f$ 是 \mathcal{L} 幺半群 T 代数 $[(N, \alpha) \times (X, A), \mu_{(X, A)}]$ 到 $[(N, \alpha) \times (Y, B), \mu_{(Y, B)}]$ 的 \mathcal{L} 幺半群 T 代数映射。

这说明 $\varphi_{(X, Y)}$ 是一一到上的映射。根据伴随函子的等价定义^[7], 从而易验证 F^T 与 G^T 构成一对伴随函子, F^T 为左伴随, G^T 为右伴随, 即 $F^T \dashv G^T$ 。证毕

定义10 设 $1_N \times 1 : (N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L}) \rightarrow (N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L})$, 满足条件:

1) 对任意 $(N, \alpha) \times (X, A) \in (N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L})$, 有下式成立

$$(1_N \times 1)((N, \alpha) \times (X, A)) = (N, \alpha) \times (X, A);$$

2) 对任意 $1_N \times f : (N, \alpha) \times (X, A) \rightarrow (N, \alpha) \times (Y, B)$, 有下式成立

$$(1_N \times 1)(1_N \times f) = 1_N \times f,$$

则 $1_N \times 1$ 是一个函子, 我们称之为从 $(N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L})$ 到 $(N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L})$ 的 \mathcal{L} 幺半群单位函子, 简称 \mathcal{L} 幺半群单位函子。

引理4 \mathcal{L} 积函子 $F : \text{Set}(\mathcal{L}) \rightarrow (N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L})$ 与 \mathcal{L} 幺半群单位函子 $G : (N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L}) \rightarrow (N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L})$ 是一对伴随函子, 且 F 为左伴随, G 为右伴随, 即 $F \dashv G$ 。

证明 类似于引理3的证法, 从略。

定义11 设 $K : (N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{D}^T$, 满足条件:

1) 对任意 $(N, \alpha) \times (X, A) \in \text{ob}((N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L}))$, 有下面等式成立

$$K((N, \alpha) \times (X, A)) = [(N, \alpha) \times (X, A), \mu_{(X, A)}];$$

2) 对任意 \mathcal{L} 积映射 $T(f) = 1_N \times f : (N, \alpha) \times (X, A) \rightarrow (N, \alpha) \times (Y, B)$, 有下面等式成立

$$\begin{aligned} K(T(f)) &= K(1_N \times f) = T(f) \\ &= 1_N \times f : [(N, \alpha) \times (X, A), \mu_{(X, A)}] \rightarrow [(N, \alpha) \times (Y, B), \mu_{(Y, B)}], \end{aligned}$$

则 K 为一个函子, 称作伴随 $F \dashv G$ 与伴随 $F^T \dashv G^T$ 的 \mathcal{L} 比较函子, 简称 \mathcal{L} 比较函子。

引理5 \mathcal{L} 比较函子 K 是使得 $G^T K = G$, $K F = F^T$ 成立的唯一函子, 即 K 是满足下列图表中两个三角形可交换的唯一函子。

$$\begin{array}{ccc} \text{Set}(\mathcal{L}) & \xrightarrow{F} & (N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L}) \\ F^T \downarrow & \swarrow K & \downarrow G \\ \mathcal{D}^T & \xrightarrow{G^T} & (N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L}) \end{array}$$

证明 首先易知 \mathcal{L} 比较函子 K 满足 $G^T K = G$, $KF = F^T$ 成立。只需再验证唯一性。假设另有函子 $K' : (N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{D}^T$ 满足 $G^T K' = G$, $K'F = F^T$ 成立, 则对任意 \mathcal{L} 积映射 $1_N \times f : (N, \alpha) \times (X, A) \rightarrow (N, \alpha) \times (Y, B)$, 由 $G^T K' = G'$ 可知

$$K'(1_N \times f) = G(1_N \times f) : G((N, \alpha) \times (X, A)) \rightarrow G((N, \alpha) \times (Y, B)),$$

即

$$K'(1_N \times f) = 1_N \times f : (N, \alpha) \times (X, A) \rightarrow (N, \alpha) \times (Y, B),$$

因此 $K'((N, \alpha) \times (X, A))$ 是一个形如 $[(N, \alpha) \times (X, A), c]$ 的 \mathcal{L} 幺半群 T 代数, 我们只需说明 $c = \mu_{(X, A)}$ 。由于 $c, \mu_{(X, A)}$ 是 \mathcal{L} 幺半群 T 代数映射, 考虑下面的图表

$$\begin{array}{ccccc}
 (N, \alpha) \times (N, \alpha) \times (X, A) & & & & \\
 \begin{array}{c} \searrow 1_N \times \eta_{(N, \alpha) \times (X, A)} \\ \searrow 1_N \times 1_N \times 1_X \end{array} & & \xrightarrow{1_N \times 1_N \times 1_X} & & (N, \alpha) \times (N, \alpha) \times (X, A) \\
 & (N, \alpha) \times (N, \alpha) \times (N, \alpha) \times (X, A) & \xrightarrow{1_N \times \mu_{(X, A)}} & & (N, \alpha) \times (N, \alpha) \times (X, A) \\
 & \downarrow \mu_{(N, \alpha) \times (X, A)} & & & \downarrow c \\
 & (N, \alpha) \times (N, \alpha) \times (X, A) & \xrightarrow{\mu_{(X, A)}} & & (N, \alpha) \times (X, A)
 \end{array}$$

该图表的方形和两三角形都交换, 所以最外面的四边形可交换, 故 $c = \mu_{(X, A)}$ 。这说明满足 $G^T K = G$, $KF = F^T$ 的函子唯一。 证毕

定理 4 \mathcal{L} 比较函子 K 是一个同构函子。

证明 易知 $(N, \alpha) \times \text{Set}(\mathcal{L})$ 与 \mathcal{D}^T 中的对象一一对应。对任意 $(X, A) \in \text{ob}(\text{Set}(\mathcal{L}))$, $(N, \alpha) \times (X, A)$ 对应于 $[(N, \alpha) \times (X, A), \mu_{(X, A)}]$ 。

考虑任意

$$(N, \alpha) \times (X, A) \xrightarrow[1_N \times f]{1_N \times g} (N, \alpha) \times (Y, B),$$

令 $K(1_N \times f) = K(1_N \times g)$, 即有 $1_N \times f = 1_N \times g$ 。这说明 K 是局部单的。

对任意

$$1_N \times f : [(N, \alpha) \times (X, A), \mu_{(X, A)}] \rightarrow [(N, \alpha) \times (Y, B), \mu_{(Y, B)}],$$

都存在一个 \mathcal{L} 积映射 $1_N \times f : (N, \alpha) \times (X, A) \rightarrow (N, \alpha) \times (Y, B)$, 使得 $K(1_N \times f) = 1_N \times f$ 。这说明 K 是局部满的。

根据范畴上同构函子的等价定义^[7], 这便验证了 \mathcal{L} 比较函子 K 是一个同构函子。由函子可模的定义^[7]即有下面定理成立。

定理 5 \mathcal{L} 幺半群单位函子 G 是可模的。

我们称 \mathcal{L} 幺半群单位函子 G 为 \mathcal{L} 可模的。

参考文献:

- [1] 王世强. 格值模型论中紧致性定理的一种证法[J]. 北京师范大学学报, 1980, 3-4: 25-30
Wang S Q. A proof of compactness theorem in lattice-valued model theory[J]. Journal of Beijing Normal University, 1980, 3-4: 25-30

- [2] 汤建钢. 格化代数学(I)[J]. 伊犁师范学院学报, 1989, 1: 1-17
Tang J G. Lattice-valued algebra(I)[J]. Journal of Yili Normal University, 1989, 1: 1-17
- [3] 汤建钢. 格化代数学(II)[J]. 伊犁师范学院学报, 1992, 1: 13-23
Tang J G. Lattice-valued algebra(II)[J]. Journal of Yili Normal University, 1992, 1: 13-23
- [4] 汤建钢. 格化代数学(III)[J]. 伊犁师范学院学报, 1993, 1: 1-4
Tang J G. Lattice-valued algebra(III)[J]. Journal of Yili Normal University, 1993, 1: 1-4
- [5] 汤建钢. 格化代数学(IV)[J]. 伊犁师范学院学报, 1994, 1: 1-5
Tang J G. Lattice-valued algebra(IV)[J]. Journal of Yili Normal University, 1994, 1: 1-5
- [6] Francis Borceux. Handbook of Categorical Algebra 3[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994
- [7] 贺伟. 范畴论[M]. 北京: 科学出版社, 2006
He W. Category Theory[M]. Beijing: Science Press, 2006

The \mathcal{L} Unitary Semi-group Monad in the Category of \mathcal{L} Sets

ZHANG Hong, TANG Jian-gang, LI Guo-hua

(Department of Mathematics, Yili Normal University, Yining 835000)

Abstract: In this paper we introduce the category of \mathcal{L} sets and the category of \mathcal{L} unitary semi-groups, whose true value set is a complete Heyting algebra. Then we construct the \mathcal{L} unitary semi-group monad and the \mathcal{L} unitary semi-group T algebra. Moreover, we discuss the adjoint of the \mathcal{L} product functor F and the \mathcal{L} unitary semi-group unit functor G , and prove that the corresponding \mathcal{L} comparison functor K is an isomorphism, finally we prove that the \mathcal{L} unitary semi-group unit functor G is \mathcal{L} monadic.

Keywords: category of \mathcal{L} sets; \mathcal{L} unitary semi-group monad; \mathcal{L} unitary semi-group T algebra; \mathcal{L} monadic

Received: 13 May 2009. **Accepted:** 26 May 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10871137); 2008 Undergraduate's Scientific Research Project of Yili Normal University (2008XS06).